На правах рукописи

**Кондратьева Надежда Викторовна**

# ДВОЙСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ СЕТЕЙ И ТКАНЕЙ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ С ПРОЕКТИВНОЙ СТРУКТУРОЙ

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2013

Работа выполнена на кафедре геометрии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный педагогический университет имени И. Я. Яковлева, профессор кафедры геометрии<br>**Столяров Алексей Васильевич** |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова, заведующий лабораторией<br>**Кушнер Алексей Гурьевич** |
| | кандидат физико-математических наук, профессор, Пензенский государственный университет, профессор кафедры «Алгебра»<br>**Султанов Адгам Яхиевич** |
| Ведущая организация: | ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева» |

Защита состоится «21» марта 2013 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д. 212.081.10 в ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «__» февраля 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета — Липачев Е. К.
канд. физ.-мат. наук, доцент

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Постановка вопроса и актуальность темы.** Начала теории многомерных сетей были положены исследованиями Э. Картана[1], Чжень Шэн-шэня[2], В. Т. Базылева[3,4].

В этом направлении разными авторами получены многочисленные результаты по изучению внутренней геометрии различных многообразий, несущих сети того или иного класса.

Вопросы внутренней геометрии плоской сети $\Sigma$ относительно нормализации проективного пространства $P_n$ полем гармонических плоскостей, изучаются в работах В. Т. Базылева[3,5], А. В. Столярова[6,7], А. И. Чахтаури[8].

Различным вопросам инвариантного оснащения (в смысле А. П. Нордена или Э. Картана) поверхности $V_m \subset P_n$, определяемого заданной сетью $\Sigma \subset V_m$, посвящены работы М. А. Акивиса[9,10], В. Т. Базылева[4], Н. М. Остиану[11], А. В. Столярова[12,13,14]. В статье В. Т. Базылева[4] определены чебышевские сети на поверхностях $V_m \subset P_n$. Некоторые вопросы геометрии поверхностей $V_m \subset P_n$, несущих чебышевские и геодезические сети, изучаются в работах А. В. Столярова[12,13,14].

В работах Ж. Н. Багдасаряна[15], А. К. Рыбникова[16] находятся критерии реализации линейных связностей в касательных расслоениях подмногообразия, несущего сеть того или иного строения.

---

[1]Cartan E. Sur les varietes de courbure constante d'un espace euclidiene ou non euclidiene/ E. Cartan // Bull. Soc. Math, de France. – 1919. – V. 47. – P. 125–160; 1920. – V. 48. – P. 132–208.

[2]Chern S. S. Laplace transforms of a class of higher dimensional varieties in a projective space of n dimensions / S. S. Chern // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1944. – V. 30. – № 4. – P. 95–97.

[3]Базылев В. Т. К геометрии плоских многомерных сетей / В. Т. Базылев // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1965. – №243. – С. 29–37.

[4]Базылев В. Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства / В. Т. Базылев // Известия вузов. Матем. – 1966. – № 2. – С. 9–19.

[5]Базылев В. Т. О нормализациях проективного пространства, порождаемых заданной в нем сетью / В. Т. Базылев // Лит. мат. сб., 1966. – Т. 6.– №3. – С. 313–322.

[6]Столяров А. В. О внутренней геометрии двух классов плоских многомерных сетей в проективном прстранстве / А. В. Столяров // Известия вузов. Матем. – 1969. – № 8. – С. 104–111.

[7]Столяров А. В. Двойственная теория оснащенных многообразий: Моно-графия / А. В. Столяров. – Чебоксары: изд-во Чуваш. педин-та, 1994. – 290 с.

[8]Чахтаури А. И. О внутренней геометрии трехмерной сети / А. И. Чахтаури // Тр. Тбилисск. ун-та. – 1966. – С. 129–133.

[9]Акивис М. А. О нормалях Фосса поверхности, несущей сеть сопряженных линий / М. А. Акивис // Матем. сб. – 1962. – Т. 58(100). – № 2. – С. 695-706.

[10]Акивис М. А О строении сопряженных систем на многомерных поверхностях / М. А. Акивис // Известия вузов. Матем. – 1970. – № 10. – С. 3–11.

[11]Остиану Н. М. Инвариантное оснащение поверхности, несущей сеть / Н. М. Остиану // Известия вузов. Матем., 1970. – №7. – С. 72–82.

[12]Столяров А. В. О сетях с совпавшими псевдофокусами, заданных на гиперповерхностях проективного пространства / А. В. Столяров // Известия вузов. Матем. – 1970. – № 2. – С. 86–93.

[13]Столяров А. В. О внутренней геометрии двух классов плоских многомерных сетей в проективном прстранстве / А. В. Столяров // Известия вузов. Матем. – 1969. – № 8. – С. 104–111.

[14]Столяров А. В. О внутренней геометрии многомерных поверхностей, несущих проективно чебышевскую сеть / А. В. Столяров // Известия вузов. Матем. – 1971. – № 11. – С. 99–103.

[15]Багдасарян Ж. Н. Об инвариантных аффинных связностях на гиперповерхности в $P_n$, оснащенной семейством конусов / Ж. Н. Багдасарян // Соврем. Геометрия. – Л., 1978, – С. 7–18.

[16]Рыбников А. К. О реализации аффинных связностей без кручения на по-верхностях, несущих сеть сопряженных линий / А. К. Рыбников // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех. – 1973. – № 6 – С. 64–71.

Чебышевские и геодезические сети $\Sigma$ в пространствах аффинной связности $A_{n,n}$ рассматриваются в работах А. Е. Либера[17,18]. С. Е. Степанов[19,20,21] в пространстве аффинной связности $A_{n,n}(n \geq 2)$ изучает геометрию оснащений поверхности (гиперповерхности), ассоциированных с чебышевской сетью.

Отметим некоторые другие исследования по проективной и аффинной теории поверхностей, несущих сети (или их обобщения) того или иного класса. В работе В. Т. Базылева[22] на поверхности $V_m \subset P_n$ полного ранга рассмотрены поля сопряженных и фокальных направлений, голономные сопряженные сети и преобразования Лапласа поверхности. Обзор работ по теории многомерных сетей приведен в работе В. Т. Базылева[23].

В работах В. И. Шуликовского[24,25] дается систематическое изложение теории сетей двумерного пространства $X_2$ методом тензорного анализа.

В работе С. И. Билчева и Д. Т. Дочева[26] дана классификация гиперповерхностей пространства $E_5$, несущих голономную сеть линий кривизны по наличию равенств между их главными кривизнами.

Однако следует заметить, что практически все исследования по теории сетей и тканей проводились без привлечения теории двойственности; исключение составляют работы А. И. Чахтаури[27,28,29] – по двумерным сетям и некоторые работы А. В. Столярова по многомерным сетям (см. например[30,31]).

В работе[32] А. В. Столяровым положено начало по изучению двойственной

---

[17]Либер А. Е. К теории сетей в многомерном пространстве / А. Е. Либер // Сб. «Дифференциальная геометрия» / Саратовский ун-т, 1974. – Вып. 1. – С. 72–84.

[18]Либер А. Е. О чебышевских сетях и чебышевских пространствах / А. Е. Либер // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. – М. : МГУ, 1974. – Вып. 17. – С. 177–183.

[19]Степанов С. Е. Геометрия декартовых пространств / С. Е. Степанов // ВИНИТИ. – М., 1978. – № 3414 – 78деп. – 8 с.

[20]Степанов С. Е. Чебышевские оснащения поверхности / С. Е. Степанов // ВИНИТИ. – М., 1978. – № 3414 – 78деп. – 8 с.

[21]Степанов С. Е. Реализация чебышевской связности на гиперповерхности аффинного пространства / С. Е. Степанов // Современная геометрия: Вопросы дифференциальной геометрии. – Л., 1980. – С. 73–76.

[22]Базылев В. Т. О полях сопряженных направлений на многомерных поверхностях полного ранга / В. Т. Базылев // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. В. И. Ленина. – 1967. – № 271. С. 7–33.

[23]Базылев В. Т. О многомерных сетях и их преобразованиях / В. Т. Базылев // Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. – 1965. – С. 138–164.

[24]Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия/ В. И. Шуликовский. – М. : Физматгиз, 1963. – 540 с.

[25]Шуликовский В. И. Проективная терия сетей / В. И. Шуликовский. – Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1964. – 78 с.

[26]Билчев С. И., Дочев Д. Т. Четырехмерные поверхности пятимерного евклидова пространства, несущие вполне голономную 4-ткань линий кривизны / С. И. Билчев, Д. Т. Дочев // Изв. Мат. ин-т. Болг. АН. – 1973. – 14. – С. 287–305.

[27]Чахтаури А. И. Внутренние геометрии плоских сетей / А. И. Чахтаури // Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрССР. – Тбилисси, 1947. – Т. 15. – С. 101–148.

[28]Чахтаури А. И. Приложения внутренних геометрий плоских сетей в теорию поверхностей / А. И. Чахтаури // Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрССР. – Тбилисси, 1954. – Т. 20. – С. 89–130.

[29]Чахтаури А. И. О внутренней геометрии трехмерной сети / А. И. Чахтаури // Тр. Тбилисск. ун-та. – 1966. – С. 129–133.

[30]Столяров А. В. О двойственной геометрии сетей и полярно сопряженных конфигурациях на гиперповерхности / А. В. Столяров // Известия вузов. Матем. – 1972. – № 4. – С. 109–119.

[31]Столяров А. В. О двойственной геометрии сетей на регулярной гиперполосе / А. В. Столяров // Известия вузов. Матем. – 1977. – № 8. – С. 68–78.

[32]Столяров А. В. Двойственная геометрия m-тканей на распределении $H \subset P_{n,n}$ / А. В. Столяров // Тез. Докладов 8-й Всес. конф. по совр. проблем. диф. геометрии – Одесса, 1984. – С. 151.

геометрии $m$-тканей на регулярном гиперполосном распределении $m$-мерных линейных элементов, вложенном в пространство проективной связности.

Актуальность диссертационного исследования обусловлена тем, что:

1) вопросы построения основ двойственной геометрии плоских многомерных сетей, а также основ двойственной теории многомерных сетей и тканей на различных подмногообразиях (на гиперповерхности $V_{n-1}$, на $m$-мерной поверхности $V_m (m < n - 1)$, на распределении гиперплоскостных элементов), вложенных в пространства проективной структуры (проективное $P_n$ , проективно-метрическое $K_n$ ) до настоящего времени в математической литературе оставались слабо разработанными; поэтому в дифференциальной геометрии назрела задача разрешения этих вопросов;

2) решение ключевой задачи 1) оказалось тесно связанным с разработкой основ теории двойственных аффинных связностей, определяемых произвольной нормализацией изучаемых подмногообразий; одной из центральных задач диссертационного исследования явилась задача приложения этих связностей к исследованию двойственной геометрии многомерных сетей и тканей на них.

**Цель работы.** Целью настоящего диссертационного исследования является решение указанных ключевых задач №1, №2.

**Методы исследования.** В диссертационном исследовании рассматриваемая теория развивается инвариантными методами дифференциально-геометрических исследований, а именно, методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева[33], методом внешних дифференциальных форм Э. Картана[34] и методом нормализации А. П. Нордена[35]. Следует отметить, что результаты по теории линейных связностей получены с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г. Ф. Лаптевым[33,36].

Все результаты получены в минимально специализированной системе отнесения, что позволило получить их в инвариантной форме. Все рассмотрения в диссертации проводятся с локальной точки зрения. Все встречающиеся функции предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми (то есть изучаемые подмногообразия достаточно гладкие), а при доказательстве теорем существования – аналитическими.

**Научная новизна.** Все результаты, полученные в диссертационном исследовании в ходе решения поставленных задач (см. цель работы), являются новыми. Научная новизна обусловлена тем, что изучением двойственной геометрии многомерных сетей и тканей геометры ранее почти не занимались.

В диссертационной работе приведены доказательства всех основных выводов, которые сформулированы в виде теорем.

---

[33]Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований / Г. Ф. Лаптев // Тр. Моск. матем. о-ва, 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
[34]Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии / С. П. Фиников. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
[35]Норден А. П. Пространства аффинной связности / А. П. Норден. – М. : Наука, 1976. – 432 с.
[36]Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей / Г. Ф. Лаптев // Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. – 1965. – С. 5–64.

**Теоретическая и практическая ценность результатов.** Диссертационная работа имеет теоретическое значение, полученные в ней результаты могут быть использованы при исследовании многомерных сетей и тканей на многообразиях, вложенных в пространства более общей структуры (например, в пространства $P_{n,n}$ и $A_{n,n}$ соответственно проективной и аффинной связности).

Теория, разработанная в диссертации, может быть использована в качестве факультативных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов, а также при выполнении ими курсовых, дипломных и научных работ.

**Апробация и внедрение результатов.** Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах по современным проблемам геометрии: на заседаниях научно-исследовательского семинара молодых исследователей при кафедре геометрии Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева (2008–2011 гг.), на научно-практических конференциях преподавателей, докторантов и аспирантов Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева (2008–2011 гг.), на XLVIII и XLIX Международных научных студенческих конференциях «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2010г. и 2011 г.), в II Всероссийской научной конференции «Научное творчество XXI века» с международным участием (г. Красноярск, 2010 г.) (работа была признана лучшей в секции «Физико-математические науки»); в научной конференции с международным участием «Геометрия многообразий и ее приложения» (г. Улан-Удэ, 2010 г.); в Девятой молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения – 2010» (г. Казань, 2010 г.), на II Международной научно-практической конференции «Наука и современность – 2010» (г. Новосибирск, 2010 г.); на Международной конференции «Геометрия в Одессе–2010»; во Второй Российской школе-конференции для молодых ученых «Математика, информатика, их приложения и роль в образовании» (г. Тверь, 2010 г.); во II Международной научной конференции молодых ученых «Актуальные проблемы науки и техники» (г. Уфа, 2010 г.), в международной школе-конференции «Геометрия. Инварианты. Управление» (г. Москва, 2012 г.).

**Публикации**. Основные научные результаты, включенные в диссертационную работу, опубликованы в 26 печатных работах автора, общим объемом 13 печатных листов, в том числе 4 из них в журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований.

**Вклад автора в разработку избранных проблем.** Диссертационная работа является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные научные работы по теме исследования выполнены без соавторов.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика диссертации, содержание диссертации), трех глав и списка литературы, включающего 134 наименования. Полный объем диссертации составляет 125 страниц машинописного текста.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из общей ее характеристики и трех глав.

В главе I разрабатывается двойственная теория плоских многомерных сетей в проективном и в проективно-метрическом пространствах.

В §§ 1, 2 главы I доказаны следующие предложения (теорема 1.1, 1.2):

– При невырожденной нормализации проективного пространства $P_n$ индуцируется нормализованное проективное пространство $\overline{P}_n$, двойственное исходному в смысле А. В. Столярова[7];

– Невырожденная нормализация проективного пространства $P_n$ индуцирует двойственные пространства аффинной связности $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$ без кручения, (проективно-евклидовы связности 1-го и 2-го родов[35]), которые соответствуют двойственным друг другу проективным пространствам $P_n$ и $\overline{P}_n$.

В § 3 найдены приложения двойственных аффинных связностей $\nabla$ и $\overline{\nabla}$ пространств $A_{n,n}$ и $\overline{A}_{n,n}$ к изучению плоских сетей $\Sigma \subset P_n$.

Вводится понятие двойственного образа сети $\Sigma$ – *тангенциальная плоская сеть* $\overline{\Sigma}$ в $P_n$. Записаны дифференциальные уравнения указанной сети, приведены инвариантные геометрические образы этой сети – *псевдофокальные гиперплоскости* $\eta_I^J$ и *гармонические полюса* $\eta_I$ (гиперплоскости), двойственные соответствующим образам $F_I^J$, $F_I$ сети $\Sigma \subset P_n$.

В § 4 изучается нормализация проективного пространства $P_n$, определяемая сетью $\Sigma$, в частности, взаимногармоническая нормализация (при $n=2$ взаимногармоническая нормализация является взаимнолапласовой относительно сети $\Sigma \subset P_2$[27]) и нормализация пространства, гармоничная сети $\Sigma$. Найдены аналитические условия указанных нормализаций.

В этом параграфе приведены также геометрические характеристики чебышевской и геодезической сети (теоремы 1.7, 1.8):

– в невырожденной нормализации $A_0 \to \xi_0$ проективного пространства $P_n$, гармоничной сети $\Sigma \subset P_n$, рассматриваемая сеть есть геодезическая второго (первого) рода тогда и только тогда, когда она является сетью с совпавшими псевдофокусами первого (второго) рода и поле гиперплоскостей $\xi_0$ (точек $A_0$) совпадает с полем ее гармонических гиперплоскостей $[F_I]$ (гармонических точек $F$);

– чебышевская сеть первого (второго) рода $\Sigma \subset P_n$ при $n > 2$ есть $n$ –сопряженная система, являющаяся геодезической сетью второго (первого) рода относительно данной нормализации проективного пространства $P_n$.

В § 5 рассматриваются приложения геометрии нормализованного проективно-метрического пространства $K_n$ к изучению плоских сетей. В частности, доказаны следующие предложения:

– В случае сети $\Sigma \subset K_n$, сопряженной относительно поля конусов направлений $a_{ST}\omega_0^S\omega_0^T = 0$, полярная нормализация пространства $K_n$ является нормализацией, гармоничной сети (теорема 1.13).

– Если сопряженная относительно поля невырожденного тензора $a_{IS}$ сеть $\Sigma \subset K_n$, $n \geq 2$ при некоторой нормализации пространства $K_n$ есть чебышевская первого рода, то она не может быть геодезической первого рода, что равносильно тому, что нормализация пространства $K_n$ не может быть полярной (теорема 1.18).

– Если относительно невырожденной нормализации пространства $K_n$ ($|t_{IK}| \neq 0$), гармоничной сети $\Sigma \subset K_n$, $n \geq 2$ ($t_{IK} = 0, I \neq K$), сеть $\Sigma$ является чебышевской второго рода, то $\Sigma$ есть геодезическая сеть первого рода и при $n > 2$ она является геодезической первого рода и $n$-сопряженной системой одновременно (теорема 1.20).

– Пространство аффинной связности $A_{n,n}$, индуцируемое полем гармонических гиперплоскостей чебышевской сети $\Sigma \subset K_n$ первого рода, при $n > 2$ является эквиаффинным; при этом нормализация исходного проективно-метрического пространства $K_n$ гармонична сети $\Sigma$ (теорема 1.21).

<u>Глава II</u> посвящена построению двойственной геометрии сетей на многомерных поверхностях в пространствах с проективной структурой, а именно, в проективном $P_n$ и в проективно-метрическом $K_n$.

В § 1 с использованием теоремы Картана – Лаптева получены двойственные аффинные связности $\nabla$ и $\overline{\nabla}$ на нормализованной гиперповерхности $V_{n-1}$ в пространстве $P_n$ (теоремы 2.1, 2.2), найдены приложения этих связностей к изучению внутренней геометрии сопряженных сетей $\Sigma \subset V_{n-1}$ (теоремы 2.3–2.5). Найден произвол существования гиперповерхности $V_{n-1}$, несущей сопряженную чебышевскую сеть первого и второго рода $\Sigma \subset V_{n-1} (n > 3)$ (теорема 2.6).

В § 2 исследование сетей на оснащенной многомерной поверхности $V_m$ $(2 < m < n-1)$ проективного пространства $P_n$ проводится с использованием внутренним образом ассоциированной с ней (в 3-й дифференциальной окрестности) гиперполосы $H_m$ в $P_n$, для которой исходная поверхность $V_m$ является базисной (см. теоремы 2.11 и 2.12).

В п. 3 § 2 найдены и изучаются (теоремы 2.14–2.17) две двойственные аффинные связности без кручения на нормализованной в смысле Нордена – Чакмазяна ассоциированной с поверхностью $V_m (2 < m < n-1)$ гиперполосе $H_m$ в $P_n$; все это позволяет построить двойственную геометрию сетей на рассматриваемой поверхности.

Действительно, инвариантное присоединение к поверхности $V_m \subset P_n (2 < m < n-1)$ регулярной (тензор $b_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha$ невырожден) гиперполосы $H_m \subset P_n$ с учетом наличия ее двойственного образа, а, следовательно, двойственного образа сети $\Sigma \subset V_m$ привело к построению инвариантной нормализации базисной поверхности $V_m$ полями гармонических ($n$-$m$)-мерных и ($m$-1)- мерных плоскостей сети $\Sigma \subset V_m$, *слабо сопряженной* относительно поля симметричного тензора $b_\alpha \Lambda^\alpha_{ij}$ (теорема 2.18); последнее на $V_m$ индуцирует две двойственные аффинные связности без кручения. С учетом этого на поверхности $V_m \subset P_n \, (2 < m < n-1)$ вводятся в рассмотрение, в частности, различные двойственные подклассы сетей (геодезические сети первого и второго рода, чебышевские сети первого и второго рода).

§ 3 посвящен разработке двойственных вопросов геометрии сетей $\Sigma$ на невырожденном абсолюте $Q^2_{n-1}$ в проективно-метрическом пространстве $K_n$.

В п.1 получен один из центральных результатов § 3 (теорема 2.22): проективно-метрическое пространство $K_n$ с невырожденным абсолютом $Q^2_{n-1}$ в первой дифференциальной окрестности индуцирует двойственное относительно инволютивного преобразования структурных форм проективно-метрическое пространство $\overline{K}_n$ с невырожденным абсолютом $\overline{Q}^2_{n-1}$; абсолют $\overline{Q}^2_{n-1}$ пространства $\overline{K}_n$ есть семейство касательных гиперплоскостей второго порядка к абсолюту $Q^2_{n-1}$ пространства $K_n$. В тангенциальном репере $\{\xi_{\bar{I}}\}$ найдено уравнение абсолюта $\overline{Q}^2_{n-1}$.

В п. 2:

1) при $n \geq 4$ найдено условие голономности сопряженной относительно поля конусов направлений $g_{ik}\omega^i_0\omega^k_0 = 0$ сети $\Sigma \subset Q^2_{n-1}$; геометрически это условие эквивалентно тому, что абсолют $Q^2_{n-1}$ пространства $K_n$ является гиперсопряженной системой[37] (теорема 2.23);

2) доказана теорема существования абсолюта $Q^2_{n-1} \subset K_n \, (n \geq 4)$, являющегося гиперсопряженной системой относительно сопряженной сети $\Sigma \subset Q^2_{n-1}$ (теорема 2.24).

В п. 3 найдены поля гармонических прямых $q^i_n$ и гиперпрямых $q^0_i$ сети $\Sigma \subset Q^2_{n-1}$, определяемые внутренним образом. Доказаны следующие предложения (теоремы 2.25, 2.26):

– поля гармонических прямых $q^j_n$ и гиперпрямых $q^0_i$ сопряженной сети $\Sigma$, заданной на невырожденном абсолюте $Q^2_{n-1}$ проективно-метрического пространства $K_n \, (n \geq 3)$ двойственны по отношению друг к другу и нормализуют гиперквадрику $Q^2_{n-1}$ взаимно.

В п. 4 строятся различные инвариантные оснащения абсолюта $Q^2_{n-1} \subset K_n$. Вводятся понятие *сильно оснащенного* и *согласованно оснащенного* абсолюта $Q^2_{n-1} \subset K_n$. К основному результату этого пункта можно отнести теорему 2.27: нормализация $\{\nu^i_n, \nu^0_i\}$ невырожденного абсолюта $Q^2_{n-1}$ проективно-метрического пространства $K_n$ является взаимной тогда и только тогда, когда

[37] Смирнов Р. В. Преобразования Лапласа p–сопряженных систем / Р. В. Смирнов // ДАН СССР. – 1950. – Т.71. – №3. – С. 437–439.

гиперквадрика $Q^2_{n-1}$ согласованно оснащена полями геометрических объектов $\{\nu^i_n, \nu^0_n\}$ и $\{\nu^0_i, \mu^0_n\}$ в смысле соответственно Э. Картана и Э. Бортолотти.

Доказано, что пространство проективной связности $\widetilde{P}_{n-1,n-1}$, индуцируемое оснащением в смысле Э. Картана невырожденного абсолюта $Q^2_{n-1} \subset K_n$, вырождается в проективное пространство тогда и только тогда, когда оснащающая точка Картана неподвижна (теорема 2.28).

Найдены поля геометрических объектов $\left\{q^i_n, \overset{1}{q}{}^0_n\right\}$ и $\left\{q^0_i, \overset{2}{q}{}^0_n\right\}$ на невырожденном абсолюте $Q^2_{n-1}$ проективно-метрического пространства $K_n$, определяемые сопряженной сетью $\Sigma \subset Q^2_{n-1}$, которые задают согласованное оснащение гиперквадрики $Q^2_{n-1}$ (теорема 2.9).

В п. 5 вводятся в рассмотрение аффинные связности, индуцируемые нормализацией абсолюта $Q^2_{n-1} \subset K_n$ полями гармонических прямых $q^i_n$ и гиперпрямых $q^0_i$ сопряженной сети $\Sigma \subset Q^2_{n-1}$.

В п. 6 для сети главных линий на абсолюте $Q^2_{n-1} \subset K_n$ доказано утверждение (теорема 2.33): если сопряженная сеть $\Sigma \subset Q^2_{n-1} \subset K_n$ есть сеть главных линий первого рода конгруэнции ее гармонических прямых, то линии сети $\Sigma$ суть кривые второго порядка.

Глава III посвящена получению новых результатов по геометрии проективных и двойственных аффинных связностей, а также двойственной геометрии тканей $\Sigma$ на оснащенном распределении гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ первого рода в проективно-метрическом пространстве $K_n$.

В § 1 приводится необходимый в дальнейшем изложении материал, носящий, в основном, реферативный характер. Здесь даются основные определения, приводятся дифференциальные уравнения многообразия $\mathcal{M}$ и его двойственного образа $\overline{M}$, а также дифференциальные уравнения полей фундаментальных и охваченных геометрических объектов на $\mathcal{M}$.

В § 2 рассматривается распределение гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$, внутренним образом оснащенное в смысле Э. Картана[38] полем геометрического объекта $\{H^i_n, H_n\}$; при этом найдена система форм Пфаффа $\{\theta^{\bar{i}}_{\bar{j}}\}$, определяющая на $\mathcal{M}$ пространство проективной связности $P_{n,n-1}$, приведено строение тензора кривизны-кручения $R^{\bar{i}}_{\bar{j}ST}$ этого пространства.

Основным результатом § 2 является теорема 3.2: пространство проективной связности $P_{n,n-1}$, индуцируемое оснащением в смысле Э. Картана регулярного распределения гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ в проективно-метрическом пространстве $K_n$ полем геометрического объекта $\{H^i_n, H_n\}$, вырождается в плоское

[38]Cartan E. Les espaces a connexion projective / E. Cartan // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. – М. : МГУ, 1937. – Вып. 4. – С. 147–159.

пространство тогда и только тогда, когда оснащающая точка $S_n$ неподвижна.

Доказано предложение, определяющее геометрическую характеристику оснащающей точки распределения: оснащающая точка $S_n$ распределения гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ в проективно-метрическом пространстве $K_n$ совпадает с полюсом текущего элемента $\Pi_{n-1} \equiv [A_0 A_i]$ этого распределения относительно абсолюта $Q^2_{n-1}$.

В § 3 внутренним образом построено двойственное инвариантное оснащение распределения гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ в смысле А. П. Нордена полями квазитензоров $\{H^i_n, H_i\}$, взаимное относительно абсолюта $Q^2_{n-1}$.

К основным результатам этого параграфа относятся следующие утверждения:

1) Если центр распределения $\mathcal{M}$ в $K_n$ смещается вдоль кривой, принадлежащей подмногообразию $\mathcal{M}$, то нормализация $(H^i_n, H_i)$ распределения индуцирует риманову связность с полем невырожденного тензора $a_{ij}$ (теорема 3.5 и следствие).

2) Нормализация распределения гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ в проективно-метрическом пространстве $K_n$ полями квазитензоров $H^i_n$ и $H_i$ индуцирует риманово пространство $R_{n-1}$ постоянной кривизны $K$, когда поле нормалей первого рода $H^i_n$ есть связка прямых с центром в точке $S_n$; при этом $K = -\dfrac{1}{c}$ (теорема 3.6).

В § 4 найдены приложения двойственных аффинных связностей пространств $A_{n,n-1}$ и $\overline{A}_{n,n-1}$ к изучению геометрии сопряженной ткани $\Sigma$ на распределении гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ в $K_n$.

Найдены условия параллельного перенесения направления касательной $A_0 A_i$ к $i$-ой линии ткани $\Sigma \subset \mathcal{M}$ вдоль ее линии $\omega^k_0$ в аффинной связности пространства $A_{n,n-1}$ или $\overline{A}_{n,n-1}$, индуцируемого нормализацией А. П. Нордена регулярного распределения гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$. Дано определение геодезической и чебышевской тканей первого и второго рода, получены необходимые и достаточные аналитические условия существования их.

Основным результатом § 4 является предложение (теорема 3.9): сопряженная ткань $\Sigma$ на регулярном распределении гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ в проективно-метрическом пространстве $K_n$ является тканью с совпавшими псевдофокусами $F^k_i$ (псевдофокальными гиперплоскостями $\eta^k_i$) тогда и только тогда, когда относительно поля гармонических гиперпрямых $q^0_i$ (гармонических прямых $q^i_n$) данная ткань является геодезической второго (первого) рода.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Построены основы двойственной геометрии плоских многомерных сетей в проективном и в проективно-метрическом пространстве.
2. На различных подмногообразиях, вложенных в пространство с проективной структурой, построена двойственная теория сетей и тканей.
3. Разработаны основы теории двойственных аффинных связностей, определяемые нормализацией рассматриваемых подмногообразий.
4. Найдены приложения аффинных связностей, индуцируемых нормализацией различных подмногообразий проективного $P_n$ и проективно-метрического $K_n$ пространств, к изучению двойственной геометрии сетей и тканей на них.

### Публикации по теме диссертации

**Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК РФ**

1. *Кондратьева Н. В*. О некоторых классах сетей, заданных на регулярной гиперповерхности проективного пространства / Н. В. Кондратьева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2010. – № 4 (68). – С. 94–101. (0,5 п. л.)
2. *Кондратьева Н. В*. Двойственная геометрия тканей на распределении гиперплоскостных элементов в проективно-метрическом пространстве / Н. В. Кондратьева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2011. – № 2 (70). – С. 55–62. (0,5 п. л.)
3. *Кондратьева Н. В*. Некоторые приложения геометрии проективно-метрического пространства к изучению плоских сетей / Н. В. Кондратьева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2011. – № 2 (70). – С. 63–69. (0,4 п. л.)
4. *Кондратьева Н. В*. Связности на оснащенном распределении гиперплоскостных элементов / Н. В. Кондратьева // В мире научных открытий. – Красноярск : Научно-инновационный центр, 2011. – №8(11). – Ч. 1. – С. 14–19. (0,4 п. л.)

**Публикации в других изданиях**

5. *Кондратьева Н. В*. Нормализованное проективное пространство / Н. В. Кондратьева // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2008. – № 3 (59). – С. 32–39. (0, 3 п. л.)
6. *Кондратьева Н. В*. Внутренняя геометрия плоских многомерных сетей / Н. В. Кондратьева // ВИНИТИ РАН. – М., 2008. – № 449 – В2008. – 20 с. (1,3 п. л.)

7. *Кондратьева Н. В.* Внутренняя геометрия плоских сетей в проективно-метрическом пространстве / Н. В. Кондратьева // ВИНИТИ РАН. – М., 2008. – № 22 – В2008. – 14 с. (0,9 п. л.)
8. *Кондратьева Н. В.* Плоские сети в нормализованном проективно-метрическом пространстве / Н. В. Кондратьева // ВИНИТИ РАН. – М., 2008. – № 61 – В2008. – 11 с. (0,7 п. л.)
9. *Кондратьева Н. В.* Внутренняя геометрия сопряженных сетей на гиперповерхности / Н. В. Кондратьева // ВИНИТИ РАН. – М., 2008. – № 148 – В2008. – 16 с. (1,0 п. л.)
10. *Кондратьева Н. В.* Геометрия сопряженных сетей на невырожденном абсолюте проективно-метрического пространства / Н. В. Кондратьева // ВИНИТИ РАН. – М., 2008. – № 434 – В2008. – 18 с. (1,1 п. л.)
11. *Кондратьева Н. В.* Сопряженные сети на регулярной гиперповерхности проективного пространства / Н. В. Кондратьева // Наука и современность – 2010 : материалы I Международной научно-практической конференции : в 3 ч. – Новосибирск : Изд-во «СИБ-ПРИНТ», 2010. – Ч. 2. – С. 160–165. (0,06 п. л.)
12. *Кондратьева Н. В.* О сопряженных сетях в нормализованном проективно-метрическом пространстве / Н. В. Кондратьева // В мире научных открытий. – Красноярск : Научно-инновационный центр, 2010. – №4(10). – Ч. 5. – С. 7–9. (0,2 п. л.)
13. *Кондратьева Н. В.* О гиперповерхности, несущей сопряженную сеть / Н . В. Кондратьева // Геометрия многообразий и ее приложения : материалы научной конференции с международным участием. – Улан-Удэ : Изд-во Бурятского гос. ун-та, 2010. – С. 28–34. (0,3 п. л.)
14. *Кондратьева Н. В.* Приложения геометрии проективно-метрического пространства к изучению некоторых классов сетей / Н . В. Кондратьева // Студент и научно-технический прогресс : материалы XLVIII Международной научной студенческой конференции. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2010. – С. 73. (0,06 п. л.)
15. *Кондратьева Н. В.* Двойственная геометрия сетей на невырожденном абсолюте проективно-метрического пространства / Н. В. Кондратьева // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2010. – №1(15). – С. 3–9. (0,4 п. л.)
16. *Кондратьева Н. В.* О сопряженной сети на гиперквадрике проективно-метрического пространства / Н. В. Кондратьева // В мире научных открытий. – Красноярск : Научно-инновационный центр, 2010. – №5(11). – Ч. 1. – С. 14–19. (0,5 п. л.)
17. *Кондратьева Н. В.* О сопряженных сетях, заданных на гиперповерхности / Н. В. Кондратьева // Геометрия в Одессе – 2010 : тезисы докладов Международной конференции. – Одесса : Фонд «Наука», 2010. – С. 38. (0,06 п. л.)
18. *Кондратьева Н. В.* Аффинные связности на абсолюте проективно-метрического пространства / Н. В. Кондратьева // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского : материалы Девятой молодежной научной школы–конференции «Лобачевские чтения – 2010». – Казань : Казанское математическое общество, 2010. – Т. 40. – С. 184–188. (0,3 п. л.)

19. *Кондратьева Н. В.* Сети и аффинные связности на гиперполосе, ассоциированной с поверхностью / Н. В. Кондратьева // Научно-информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов / Чувашский госпедун-т. – Чебоксары, 2010. – №2(16). – С. 19–23. (0,3 п. л.)
20. *Кондратьева Н. В.* Некоторые классы сетей в проективно-метрическом пространстве / Н. В. Кондратьева // Диф. геометрия многообразий фигур : Межвуз. темат. сб. науч. тр. – Калининград: Российский гос. ун-т им. И. Канта, 2010. – Вып. 41. – С. 61–69. (0,6 п. л.)
21. *Кондратьева Н. В.* Сопряженные сети на поверхности проективного пространства / Н. В. Кондратьева // Актуальные проблемы науки и техники : сб. трудов II Международной научной конференции молодых ученых. – Уфа : Нефтегазовое дело. – 2010. – Т. I. – С. 11–15. (0,3 п. л.)
22. *Кондратьева Н. В.* Двойственная геометрия многомерной поверхности в проективном пространстве / Н. В. Кондратьева // Математика, информатика, их приложения и роль в образовании : Материалы второй Российской школы-конференции с междун. участием для молодых ученых. – Тверь : Твер. гос. ун-т, 2010. – С. 150–155. (0,4 п. л.)
23. *Кондратьева Н. В.* Двойственная геометрия сетей на поверхности проективного пространства / Н. В. Кондратьева // ВИНИТИ РАН. – М., 2008. – № 704 – В2010. – 20 с. (1,25 п. л.)
24. *Кондратьева Н. В.* Внутренняя геометрия распределения гиперплоскостных элементов в проективно-метрическом пространстве / Н. В. Кондратьева // ВИНИТИ РАН. – М., 2011. – № 154 – В2008. – 12 с. (0,75 п. л.)
25. *Кондратьева Н. В.* Проективные связности на распределении гиперплоскостных элементов в проективно-метрическом пространстве / Н. В. Кондратьева // Студент и научно-технический прогресс : материалы XLIX Международной научной студенческой конференции. – Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т, 2011. – С. 78. (0,06 п. л.)
26. *Кондратьева Н. В.* Приложения теории гиперполос к изучению двойственной геометрии сетей на поверхности / Н. В. Кондратьева // Диф. геометрия многообразий фигур : Межвуз. темат. сб. науч. тр. – Калининград: Российский гос. ун-т им. И. Канта, 2011. – Вып. 42. – С. 48–56. (0,5 п. л.)

Подписано к печати _______________ . Формат 60×84 / $_{16}$.
Бумага ксероксная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 0,9. Тираж 100 экз. Заказ ____ .

Отдел оперативной полиграфии
Чувашского государственного педагогического университета
428000, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.